学校________ 姓名________ 班级________ 座号________

试卷类型：A

潍坊市高考模拟考试

# 数　　学

2024.4

本试卷共4页．满分150分．考试时间120分钟．

**注意事项：**

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名．
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．
3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回．

**一、单项选择题：本大题共8个小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 已知集合 $A=\{x|\frac{x-100}{x}<0\}$，$B=\{x|\sqrt{x}>4\}$，则 $A\cap B=$

A. $(0,+\infty)$　　B. $(2,100)$　　C. $(16,100)$　　D. $(2,+\infty)$

2. 已知随机变量 $X\sim N(3,\sigma^2)$，且 $P(X\geqslant4)=0.3$，则 $P(X>2)=$

A. 0.2　　B. 0.3　　C. 0.7　　D. 0.8

3. 将函数 $f(x)=\cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，再将所得图象上的所有点，纵坐标不变，横坐标变为原来的2倍，得到 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=$

A. $\sin2x$　　B. $\sin\frac{x}{2}$　　C. $-\sin\frac{x}{2}$　　D. $\cos2x$

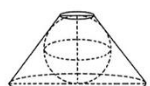
4. 已知 $a=\mathrm{e}^{-1}$，$b=\lg a$，$c=\mathrm{e}^{a}$，则

A. $b<a<c$　　B. $b<c<a$　　C. $a<b<c$　　D. $c<b<a$

5. 在平面直角坐标系 $xOy$ 内，将曲线 $C_1: x^2+y^2=1(x\geqslant0)$ 绕原点 $O$ 逆时针方向旋转角 $\alpha$ 得到曲线 $C_2$，若 $C_2$ 是一个函数的图象，则 $\alpha$ 可以为

A. $30°$　　B. $60°$　　C. $90°$　　D. $180°$

6. 如图，圆台的上、下底面半径分别为 $r_1$，$r_2$，且 $2r_1+r_2=12$，半径为4的球与圆台的上、下底面及每条母线均相切，则圆台的侧面积为



A. $36\pi$　　B. $64\pi$

C. $72\pi$　　D. $100\pi$



7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x, & x\geqslant0,\\ -|x^2+2x|, & x<0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 图象上关于原点对称的点有

A. 1对　　B. 2对　　C. 3对　　D. 4对

8. 已知 $P$ 为抛物线 $y^2=2x$ 上的一动点，过 $P$ 作圆 $(x-2)^2+y^2=\frac{3}{4}$ 的切线，切点分别为 $A$，$B$，则 $\angle APB$ 的最大值为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

**二、多项选择题：本大题共3个小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得6分，选对但不全的得部分分，有选错的得0分．**

9. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点分别为 $F_1$，$F_2$，$P$ 为 $C$ 上一点，则

A. $C$ 的焦距为 $2\sqrt{5}$　　B. $C$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\triangle F_1PF_2$ 的周长为 $3+\sqrt{5}$　　D. $\triangle F_1PF_2$ 面积的最大值为 $2\sqrt{5}$

10. 定义域是复数集的子集的函数称为复变函数，$f(z)=z^2$ 就是一个多项式复变函数．给定多项式复变函数 $f(z)$ 之后，对任意一个复数 $z_0$，通过计算公式 $z_{n+1}=f(z_n)$，$n\in\mathbf{N}$ 可以得到一列值 $z_0,z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$．如果存在一个正数 $M$，使得 $|z_n|<M$ 对任意 $n\in\mathbf{N}$ 都成立，则称 $z_0$ 为 $f(z)$ 的收敛点；否则，称 $z_0$ 为 $f(z)$ 的发散点．则下列选项中是 $f(z)=z^2$ 的收敛点的是

A. $\sqrt{2}$　　B. $-\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为平面向量，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|=\frac{1}{2}$，则

A. $1\leqslant|\boldsymbol{c}|\leqslant\frac{3}{2}$　　B. $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$ 的最大值为 $\frac{1+2\sqrt{5}}{4}$

C. $-1\leqslant\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\leqslant1$　　D. 若 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则 $\lambda+\mu$ 的最小值为 $1-\frac{\sqrt{5}}{4}$

**三、填空题：本大题共3个小题，每小题5分，共15分．**

12. 已知命题 $p$：$\exists x\in[-1,1]$，$x^2>a$，则 $\neg p$ 为________．

13. 请写出同时满足下面三个条件的一个函数解析式 $f(x)=$________．

①$f(1-x)=f(1+x)$；②$f(x)$ 至少有两个零点；③$f(x)$ 有最小值．

14. 在 $\triangle ABC$ 中，角 $A$，$B$，$C$ 所对边分别为 $a$，$b$，$c$，其外接圆半径为1，$\sin2A+\sin2B+\sin2C=1$，则 $\triangle ABC$ 的面积为________；当 $A$ 取得最大值时，则 $a^4-8a=$________．

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）

已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-ax^2+b$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=(e-2)x+3-e$.

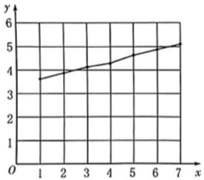
（1）求实数 $a,b$ 的值；

（2）求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

16.（15 分）

某市 2017 年至 2023 年城镇居民人均可支配收入如下表，将其绘制成散点图（如下图），发现城镇居民人均可支配收入 $y$（单位：万元）与年份代号 $x$ 具有线性相关关系.

| 年份 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 年份代号 $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 人均可支配收入 $y$ | 3.65 | 3.89 | 4.08 | 4.30 | 4.65 | 4.90 | 5.12 |




（1）求 $y$ 关于 $x$ 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，并根据所求回归方程，预测 2024 年该市城镇居民人均可支配收入；

（2）某分析员从 2017 年至 2023 年人均可支配收入中，任取 3 年的数据进行分析，记其中人均可支配收入超过 4.5 万的年份个数为随机变量 $X$，求 $X$ 的分布列与数学期望.

参考数据及公式：$\sum_{i=1}^{7} y_i=30.59$，$\sum_{i=1}^{7} x_iy_i=129.36$，$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.



17.（15 分）

如图 1，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=2BC=4$，$\angle ABC=60°$，$E$ 为 $CD$ 的中点，将 $\triangle ADE$ 沿 $AE$ 折起，连结 $BD,CD$，且 $BD=4$，如图 2.

（1）求证：图 2 中的平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCE$；

（2）在图 2 中，若点 $F$ 在 $BD$ 上，直线 $AF$ 与平面 $ABCE$ 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$，求点 $F$ 到平面 $DEC$ 的距离.

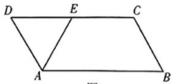



图1

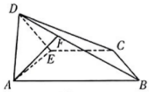



图2

18.（17 分）

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的实轴长为 $2\sqrt{3}$，右焦点 $F_2$ 到一条渐近线的距离为 1.

（1）求 $C$ 的方程；

（2）过 $C$ 上一点 $P_1(3,\sqrt{2})$ 作 $C$ 的切线 $l_1$，$l_1$ 与 $C$ 的两条渐近线分别交于 $R,S$ 两点，$P_2$ 为点 $P_1$ 关于坐标原点的对称点，过 $P_2$ 作 $C$ 的切线 $l_2$，$l_2$ 与 $C$ 的两条渐近线分别交于 $M,N$ 两点，求四边形 $RSMN$ 的面积.

（3）过 $C$ 上一点 $Q$ 向 $C$ 的两条渐近线作垂线，垂足分别为 $H_1,H_2$，是否存在点 $Q$，满足 $|QH_1|+|QH_2|=2$，若存在，求出点 $Q$ 坐标；若不存在，请说明理由.

19.（17 分）

数列 $\{a_n\}$ 中，从第二项起，每一项与其前一项的差组成的数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 称为 $\{a_n\}$ 的一阶差数列，记为 $\{a_n^{(1)}\}$，依此类推，$\{a_n^{(1)}\}$ 的一阶差数列称为 $\{a_n\}$ 的二阶差数列，记为 $\{a_n^{(2)}\}$，…. 如果一个数列 $\{a_n\}$ 的 $p$ 阶差数列 $\{a_n^{(p)}\}$ 是等比数列，则称数列 $\{a_n\}$ 为 $p$ 阶等比数列 $(p\in\mathbf{N}^*)$.

（1）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$.

（ⅰ）求 $a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_3^{(1)}$；

（ⅱ）证明：$\{a_n\}$ 是一阶等比数列；

（2）已知数列 $\{b_n\}$ 为二阶等比数列，其前 5 项分别为 $1,\frac{20}{9},\frac{37}{9},\frac{78}{9},\frac{215}{9}$，求 $b_n$ 及满足 $b_n$ 为整数的所有 $n$ 值.