

2021 级高三校际联合考试

数学试题 2024.04

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束，将试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知幂函数图像过点 $(2, 4)$ ，则函数的解析式为（ ）

- A. $y = 2^x$ B. $y = x^2$ C. $y = \log_2 x$ D. $y = \sin x$

2. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ，则 “ $a > b$ ” 是 “ $a^3 > b^3$ ” 的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 $(x+a)^5 = p_5 x^5 + p_4 x^4 + p_3 x^3 + p_2 x^2 + p_1 x + p_0$ ，若 $p_4 = 15$ ，则 $a =$ （ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 已知 $a = \log_2 1.41, b = 1.7^{0.3}, c = \cos \frac{7\pi}{3}$ ，则（ ）

- A. $b > a > c$ B. $b > c > a$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，首项 $a_1 = 3$ ，且数列 $\{\log_3 a_n\}$ 是以 -2 为公差的等差数列，则 $a_3 =$ （ ）

- A. $\frac{1}{27}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. 9

6. 已知棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ，以正方体中心为球心的球 O 与正方体的各条棱相切，若点

P 在球 O 的正方体外部（含正方体表面）运动，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最大值为（ ）

- A. 2 B. $\frac{7}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

7. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数， $f(5.5) = 4, g(x) = (x-1)f(x)$ ，若 $g(x+1)$ 是偶函数，则

$g(-0.5) =$ （ ）

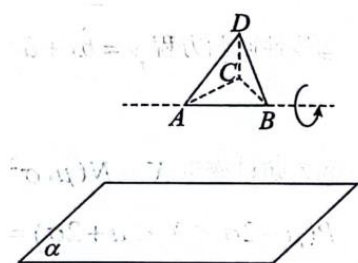
A. -6

B. -4

C. 4

D. 6

8. 如图, 已知四面体 $ABCD$ 的棱 $AB \parallel$ 平面 α , 且 $AB = 2$, 其余的棱长均为 $\sqrt{2}$. 四面体 $ABCD$ 以 AB 所在的直线为轴旋转 x 弧度, 且四面体 $ABCD$ 始终在水平放置的平面 α 的上方. 如果将四面体 $ABCD$ 在平面 α 内正投影面积看成关于 x 的函数, 记为 $S(x)$, 则函数 $S(x)$ 的最小正周期与 $S(x)$ 取得最小值时平面 ABC 与平面 α 所成角分别为 ()

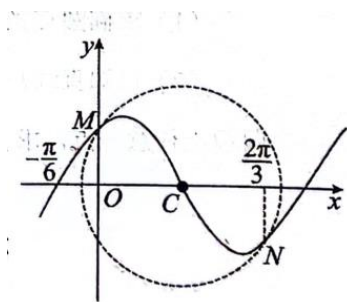
A. $2\pi, 0$ B. $\pi, \frac{\pi}{2}$ C. $2\pi, \frac{\pi}{2}$ D. $\pi, \frac{\pi}{4}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 同时投掷甲、乙两枚质地均匀的硬币, 记“甲正面向上”为事件 A , “乙正面向上”为事件 B , “甲、乙至少一枚正面向上”为事件 C , 则下列判断正确的是 ()

A. A 与 B 相互独立B. A 与 B 互斥C. $P(B|C) = \frac{2}{3}$ D. $P(C) = \frac{1}{2}$

10. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图像如图中实线所示, 图中圆 C 与 $f(x)$ 的图像交于 M, N 两点, 且 M 在 y 轴上, 则下列命题正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π B. 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减.C. 函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

D. 若圆 C 的半径为 $\frac{5\pi}{12}$, 则 $f(x) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

11. 已知 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 是曲线 $C: 7x^2 - 6y + 6y^2 + |x^2 + 6y - 3| = 21$ 上不同的两点, O 为坐标原点, 则 ()

A. $x_1^2 + y_1^2$ 的最小值为 3

B. $2 \leq \sqrt{x_1^2 + (y_1 - 1)^2} + \sqrt{x_1^2 + (y_1 + 1)^2} \leq 4$

C. 若直线 $y = kx + 3$ 与曲线 C 有公共点, 则 $k \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{15}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{15}}{3}, +\infty\right)$

D. 对任意位于 y 轴左侧且不在 x 轴上的点 P , 都存在点 Q , 使得曲线 C 在 P, Q 两点处的切线垂直

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 设 $m \in \mathbf{R}, i$ 为虚数单位. 若集合 $A = \{1, 2m + (m-1)i\}, B = \{0, 1, 2\}$, 且 $A \subseteq B$, 则 $m =$ _____.

13. 已知 x 轴为函数 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$ 图像的一条切线, 则实数 a 的值为 _____.

14. “-1,0,1 序列”在通信技术中有着重要应用, 该序列中的数取值于 -1,0 或 1. 设 A 是一个有限 “-1,0,1 序列” $f(A)$ 表示把 A 中每个都变为 -1,0, 每个 0 都变为 -1,1, 每个 1 都变为 0, 1, 得到新的有序实数组. 例如: $A = (-1, 0, 1)$, 则 $f(A) = (-1, 0, -1, 1, 0, 1)$. 定义 $A_{k+1} = f(A_k), k = 1, 2, 3, \dots$, 若 $A_1 = (-1, 1), A_n$ 中 1 的个数记为 b_n , 则 $\{b_n\}$ 的前 10 项和为 _____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 分别以 a, b, c 为边长的正三角形的面积依次为 S_1, S_2, S_3 , 且

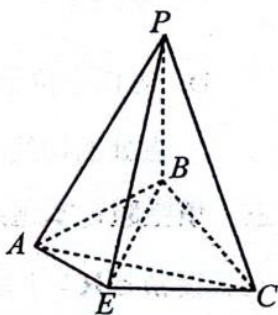
$$S_1 - S_2 - S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} bc.$$

(1) 求角 A ;

(2) 若 $\overline{BD} = 4\overline{CD}, \angle CAD = \frac{\pi}{6}$, 求 $\sin \angle ACB$.

16. (15 分)

在三棱锥 $P-ABC$ 中, $BA \perp BC, PB \perp$ 平面 ABC , 点 E 在平面 ABC 内, 且满足平面 $PAE \perp$ 平面 $PBE, AB = BC = BP = 1$.



(1) 求证: $AE \perp BE$;

(2) 当二面角 $E-PA-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 求三棱锥 $E-PCB$ 的体积.

17. (15 分)

某公司为考核员工, 采用某方案对员工进行业务技能测试, 并统计分析测试成绩以确定员工绩效等级.

(1) 已知该公司甲部门有 3 名负责人, 乙部门有 4 名负责人, 该公司从甲、乙两部门中随机选取 3 名负责人做测试分析, 记负责人来自甲部门的人数为 X , 求 X 的最有可能的取值;

(2) 该公司统计了七个部门测试的平均成绩 x (满分 100 分) 与绩效等级优秀率 y , 如下表所示:

x	32	41	54	68	74	80	92
y	0.28	0.34	0.44	0.58	0.66	0.74	0.94

根据数据绘制散点图, 初步判断, 选用 $y = \lambda e^{cx}$ 作为回归方程. 令 $z = \ln y$, 经计算得

$$\bar{z} = -0.642, \frac{\sum_{i=1}^7 x_i z_i - 7 \bar{x} \bar{z}}{\sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7 \bar{x}^2} \approx 0.02.$$

(i) 已知某部门测试的平均成绩为 60, 估计其绩效等级优秀率;

(ii) 根据统计分析, 大致认为各部门测试平均成绩 $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$, σ^2 近似

为样本方差 s^2 . 经计算 $s \approx 20$, 求某个部门绩效等级优秀率不低于 0.78 的概率.

参考公式与数据: ① $\ln 0.15 \approx -1.9, e^{1.2} \approx 3.32, \ln 5.2 \approx 1.66$.

② 线性回归方程 $y = \hat{b}x + a$ 中, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$.

③ 若. 随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$,

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544, P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9974$.

18. (17 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-\sqrt{2}, 0)$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 已知直线 l 与椭圆 C 相切, 与圆 $O: x^2 + y^2 = 3a^2$ 相交于 A, B 两点, 设 P 为圆 O 上任意一点, 求 $\triangle PAB$ 的面积最大时直线 l 的斜率.

19. (17 分)

已知函数 $f(x) = \sin x, g(x) = x \cos x - \sin x$.

(1) 判断函数 $g(x)$ 在区间 $(0, 3\pi)$ 上的零点个数, 并说明理由;

(2) 函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在区间 $(0, (n+1)\pi) (n \in \mathbf{N}_+)$ 上的所有极值之和为 $M(n)$, 证明: 对于

$\forall n \in \mathbf{N}_+, M(n) < 0$.