济宁市2024年高考模拟考试

数学试题

2024.04

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内，已知复数 $z=2+3i$，则复数 $i\cdot z$ 对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知集合 $A=\{x|y=\sqrt{x-1}\}$，$B=\{y|y=e^{1-x}\}$，则 $A\cap B=$

A. $(0,1)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $[0,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

3. 已知 α,β 是两个平面，a,b 是两条直线，则下列命题为真命题的是

A. 若 $a\subset\alpha,b\subset\beta,\alpha\perp\beta$，则 $a\perp b$　　B. 若 $a\subset\alpha,b\subset\beta,\alpha/\!/\beta$，则 $a/\!/b$

C. 若 $a\perp\alpha,b\perp\beta,a/\!/b$，则 $\alpha/\!/\beta$　　D. 若 $a/\!/\alpha,a/\!/b$，则 $b/\!/\alpha$

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=4$，则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为

A. $(-1,1)$　　B. $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　　C. $(1,-1)$　　D. $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $A=\frac{2\pi}{3}$，$\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，$b=5$，则 $\triangle ABC$ 的面积为

A. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{15}{2}$　　C. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$　　D. $15\sqrt{3}$

6. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x)+f(x)=4$，正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{1012}\cdot a_{1013}=100$，则 $\sum_{k=1}^{2024}f(\lg a_k)=$

A. 1012　　B. 2024　　C. 3036　　D. 4048

7. 已知抛物线 $E: y^2=4x$ 的焦点为 F，过 $K(-1,0)$ 的直线 l 与抛物线 E 在第一象限内交于 A、B 两点，若 $|BF|=3|AF|$，则直线 l 的斜率为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

8. 已知 O 是坐标原点，$A(3,0)$，动点 $P(x,y)$ 满足 $|PO|=2|PA|$，则 $\frac{x+\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的最大值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对得部分分，有选错的得 0 分。

9. 下列说法中正确的是

A. 样本数据 3,4,5,6,7,8,9 的第 80 百分位数是 7.5

B. 随机变量 $X\sim B(4,p)$，若 $E(X)=\frac{4}{3}$，则 $D(X)=\frac{8}{9}$

C. 已知随机事件 A,B，且 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$，若 $P(B|A)+P(\overline{B})=1$，则事件 A,B 相互独立

D. 已知变量 x,y 具有线性相关关系，其经验回归方程为 $\hat{y}=0.6x+m$，若样本中心点为 $(m,-3.2)$，则实数 m 的值为 2

10. 已知函数 $f(x)=\sin x$，将函数 $y=f(x)$ 图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，再将所得图象上各点向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，设函数 $h(x)=af(x)+g(x)(a\in\mathbf{R})$，则下列说法中正确的是

A. 直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 是函数 $h(x)$ 图象的一条对称轴

B. $\frac{\pi}{2}$ 是函数 $h(x)$ 的一个周期

C. 当 $a=2$ 时，函数 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$

D. 若函数 $y=h(x)$ 在 $x\in[0,2\pi]$ 上有 4 个零点，则 $a\in(-1,1)$

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，P 在椭圆上（异于左、右顶点），圆 I 内切于 $\triangle PF_1F_2$，直线 PI 与 x 轴相交于点 M，则下列说法中正确的是

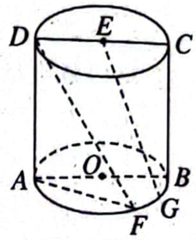
A. $\frac{1}{|PF_1|}+\frac{2}{|PF_2|}$ 的最小值为 3　　B. 圆 I 半径的最大值为 $2\sqrt{3}-3$

C. 若 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{3}$，则 $|PM|=\frac{\sqrt{6}}{4}$　　D. 点 M 横坐标的取值范围是 $(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 两位老师和四位同学站成一排，如果两位老师不相邻且不站两端，则共有__▲__种不同的站法.（用数字作答）

13. 如图，四边形 $ABCD$ 是圆柱 OE 的轴截面，且 $AB=BC=4$，F，G 是圆 O 上异于 A，B 的两点，当 EG∥平面 DAF 时，直线 EG 与直线 AF 所成角的余弦值为__▲__.



14. 已知 P，Q 分别是直线 l：$2x-y-3=0$ 和曲线 C：$y=x+\ln x$ 上的动点，且 P，Q 两点不重合，O 为坐标原点，G 为△OPQ 的重心，则 $|\overrightarrow{OG}|$ 的最小值为__▲__.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本题满分 13 分）

为了有针对性地提高学生体育锻炼的积极性，某中学需要了解性别因素是否对本校学生体育锻炼的经常性有影响，为此对学生是否经常锻炼的情况进行了抽样调查，从全体学生中随机抽取男女各 100 名学生，经统计，抽查数据如下表：

性别	锻炼		合计
	经常	不经常	
男生	80	20	100
女生	60	40	100
合计	140	60	200

(1)依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，分析性别与体育锻炼的经常性是否有关？

(2)为提高学生体育锻炼的积极性，学校决定在上述经常参加体育锻炼的学生中，按性别分层抽样随机抽取 7 名同学组成体育锻炼宣传小组，并从这 7 名同学中选出 3 人担任宣传组长，记女生担任宣传组长的人数为 X，求随机变量 X 的分布列及数学期望.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.（其中，$n=a+b+c+d$ 为样本容量）

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

16.（本题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=(a-1)x+e^x(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $y=f(x)$ 的单调性；

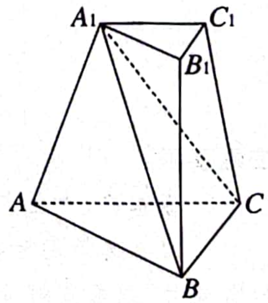
(2)设函数 $g(x)=f(x)-\sin x$，若函数 $y=g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，求实数 a 的取值范围.

17.(本题满分 15 分)

如图,已知三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$A_1B=A_1C=2BC=4$,$\angle ACA_1=\angle ACB=60^\circ$.

(1)证明:平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC;

(2)记三棱锥 A_1-ABC 的体积为 V_1,三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V_2,若 $V_1=\frac{4}{7}V_2=3$,求 BB_1 与平面 A_1BC 所成角的正弦值.



18.(本题满分 17 分)

如图所示三角数阵满足的规律如下:第 1 行只有一个数字 1,第 n($n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant2$)行的第一个数和最后一个数均为 2^n-1,其余各数均为其肩上两数相加,记第 i 行的第 j 个数为 a_{ij}($i\in\mathbf{N}^*$,$j\in\mathbf{N}^*$).

(1)写出 a_{72},a_{73},a_{74} 的值;

(2)当 $i\geqslant2$ 且 $i\in\mathbf{N}^*$ 时,解关于 i 的不等式:$a_{i2}>2024$;

(3)记数阵中第 n 行所有数字之和为 S_n,求数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

1

3 3

7 6 7

15 13 13 15

31 28 26 28 31

……………………………………

19.(本题满分 17 分)

已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率 $e=\sqrt{5}$,双曲线 E 与圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$ 的一个交点坐标是$\left(\frac{4\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15}\right)$.

(1)求双曲线 E 和圆 O 的标准方程;

(2)过双曲线 E 上的一点 P 作圆 O 的两条切线 l_1,l_2,若 l_1,l_2 的斜率分别为 k_1,k_2,证明:$k_1\cdot k_2$ 为定值;

(3)在(2)的条件下,若切线 l_1,l_2 分别与双曲线 E 相交于另外的两点 M,N,证明:M,O,N 三点共线.