

## 日照市 2021 级高三模拟考试

## 数学试题

2024. 02

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束，将试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | 2x^2 - x - 1 \leq 0\}$ ， $B = \{x | x > 0\}$ ，则  $A \cap B =$   
A.  $[-\frac{1}{2}, 1]$       B.  $[-\frac{1}{2}, +\infty)$       C.  $[0, 1]$       D.  $(0, 1]$
2. 已知数列  $\{a_n\}$  是公比为 2 的等比数列，且  $a_1 + a_2 = 3$ ，则  $a_5 + a_6 =$   
A. 24      B. 48      C. 72      D. 96
3. 已知样本空间  $\Omega = \{a, b, c, d\}$  含有等可能的样本点，且事件  $A = \{a, b\}$ ，事件  $B = \{b, c\}$ ，则  $P(\overline{AB}) =$   
A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{3}{4}$       D. 1
4. 已知  $l, m$  是两条不同的直线， $\alpha$  为平面， $m \subset \alpha$ ，下列说法中正确的是  
A. 若  $l$  与  $\alpha$  不平行，则  $l$  与  $m$  一定是异面直线  
B. 若  $l // \alpha$ ，则  $l$  与  $m$  可能垂直  
C. 若  $l \cap \alpha = A$ ，且  $A \notin m$ ，则  $l$  与  $m$  可能平行  
D. 若  $l \cap \alpha = A$ ，且  $l$  与  $\alpha$  不垂直，则  $l$  与  $m$  一定不垂直
5. 今年贺岁片，《第二十条》、《热辣滚烫》、《飞驰人生 2》引爆了电影市场，小明和他的同学一行四人决定去看这三部电影，则恰有两人看同一部影片的选择共有  
A. 9 种      B. 36 种      C. 38 种      D. 45 种

6. “ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ” 是 “ $\alpha^3 < \sin \alpha$ ” 的

- A. 充分不必要条件  
C. 充要条件

- B. 必要不充分条件  
D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数  $f(x) = 2^{\sin x} - 2^{\cos x}$ , 则

A.  $f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

B.  $f(x)$  不是周期函数

C.  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  上存在极值

D.  $f(x)$  在区间  $(0, \pi)$  内有且只有一个零点

8. 过双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$  的右支上一点  $P$ , 分别向

$\odot C_1: (x+4)^2 + y^2 = 3$  和  $\odot C_2: (x-4)^2 + y^2 = 1$  作

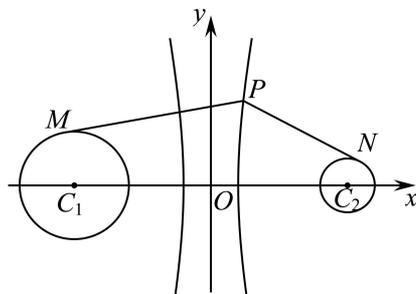
切线, 切点分别为  $M, N$ , 则  $(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) \cdot \overrightarrow{NM}$  的最小值为

A. 28

B. 29

C. 30

D. 32



二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 下列命题正确的是

A. 复数  $z = -2 - i$  的虚部为  $-1$

B. 设  $z$  为复数,  $(1-i)z = 1+i$ , 则  $|\bar{z}| = 2$

C. 若复数  $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$  为纯虚数, 则  $a = 0, b \neq 0$

D. 复数  $2 - i$  在复平面内对应的点在第二象限

10. 从标有  $1, 2, 3, \dots, 8$  的 8 张卡片中有放回地抽取两次, 每次抽取一张, 依次得到数字  $a, b$ , 记点  $A(a, b), B(1, -1), O(0, 0)$ , 则

A.  $\angle AOB$  是锐角的概率为  $\frac{7}{16}$

B.  $\angle ABO$  是直角的概率为  $\frac{1}{32}$

C.  $\triangle AOB$  是锐角三角形的概率为  $\frac{7}{64}$

D.  $\triangle AOB$  的面积不大于 5 的概率为  $\frac{43}{64}$

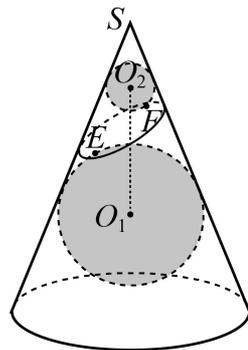
11. 如图是数学家 Germinal Dandelin 用来证明一个平面截圆锥侧面得到的截口曲线是椭圆的模型（称为“Dandelin 双球”）。在圆锥内放两个大小不同的小球，使得它们分别与圆锥的侧面、截面相切，截面分别与球  $O_1$ ，球  $O_2$  切于点  $E$ ， $F$ （ $E$ ， $F$  是截口椭圆  $C$  的焦点）。设图中球  $O_1$ ，球  $O_2$  的半径分别为 4 和 1，球心距  $|O_1O_2| = \sqrt{34}$ ，则

A. 椭圆  $C$  的中心不在直线  $O_1O_2$  上

B.  $|EF| = 4$

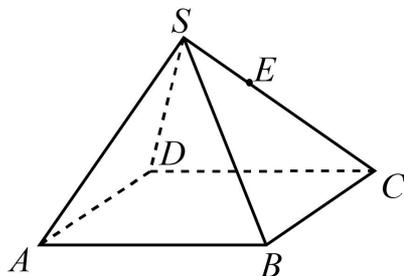
C. 直线  $O_1O_2$  与椭圆  $C$  所在平面所成的角的正弦值为  $\frac{5\sqrt{34}}{34}$

D. 椭圆  $C$  的离心率为  $\frac{3}{5}$



三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 有一组按从小到大顺序排列的数据：3，5，7，8，9，10，则这组数据的 40% 分位数为\_\_\_\_\_。
13. 设  $f(x) = x^2 + ax + b$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 满足：对任意  $x_1 \in \mathbf{R}$ ，均存在  $x_2 \in \mathbf{R}$ ，使得  $f(x_1) = f(x_2) - 2x_2$ ，则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_。
14. 已知正四棱锥  $S-ABCD$  的所有棱长都为 2，点  $E$  在侧棱  $SC$  上，过点  $E$  且垂直于  $SC$  的平面截该棱锥，得到截面多边形  $H$ ，则  $H$  的边数至多为\_\_\_\_\_， $H$  的面积的最大值为\_\_\_\_\_。



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

在锐角  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 已知  $\sqrt{2}a - 2b\sin A = 0$  且  $a = 5, c = 4\sqrt{2}$ .

(1) 求角  $B$  及边  $b$  的大小；

(2) 求  $\sin(2C + B)$  的值.

16. (15 分)

已知各项均为正数的数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $a_n, S_n, a_n^2$  为等差数列.

(1) 求  $a_1$  及  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 记集合  $\{a_n \mid a_n + \frac{4}{a_n} \leq 2k, k \in \mathbf{N}_+\}$  的元素个数为  $b_k$ , 求数列  $\{b_k\}$  的前 50 项和.

17. (15 分)

随着科技的不断发展，人工智能技术的应用领域也将会更加广泛，它将会成为改变人类社会发展的力量。某科技公司发明了一套人机交互软件，它会从数据库中检索最贴切的结果进行应答。在对该交互软件进行测试时，如果输入的问题没有语法错误，则软件正确应答的概率为 80%；若出现语法错误，则软件正确应答的概率为 30%。假设每次输入的问题出现语法错误的概率为 10%。

(1) 求一个问题能被软件正确应答的概率；

(2) 在某次测试中，输入了  $n(n \geq 6)$  个问题，每个问题能否被软件正确应答相互独立，记软件正确应答的个数为  $X$ ,  $X = k(k = 0, 1, \dots, n)$  的概率记为  $P(X = k)$ , 则  $n$  为何值时， $P(X = 6)$  的值最大？

18. (17分)

已知函数  $f(x) = 3\ln x + ax^2 - 4x (a > 0)$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 当  $a = \frac{1}{2}$  时, 若方程  $f(x) = b$  有三个不相等的实数根  $x_1, x_2, x_3$ , 且  $x_1 < x_2 < x_3$ ,

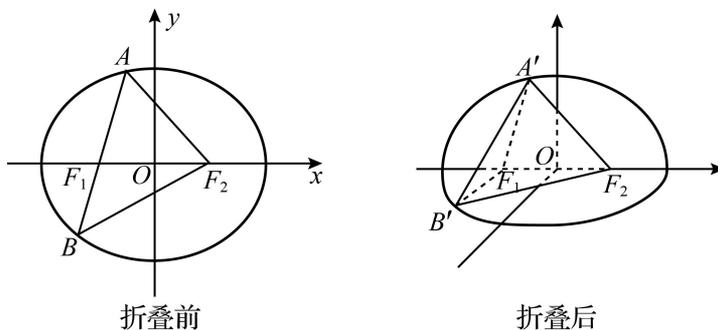
证明:  $x_3 - x_1 < 4$ .

19. (17分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 离心率为  $\frac{1}{2}$ ,

经过点  $F_1$  且倾斜角为  $\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$  的直线  $l$  与椭圆交于  $A, B$  两点 (其中点  $A$  在  $x$  轴

上方), 且  $\triangle ABF_2$  的周长为 8. 将平面  $xOy$  沿  $x$  轴向上折叠, 使二面角  $A-F_1F_2-B$  为直二面角, 如图所示, 折叠后  $A, B$  在新图形中对应点记为  $A', B'$ .



(1) 当  $\theta = \frac{\pi}{3}$  时,

① 求证:  $A'O \perp B'F_2$ ;

② 求平面  $A'F_1F_2$  和平面  $A'B'F_2$  所成角的余弦值;

(2) 是否存在  $\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ , 使得折叠后  $\triangle A'B'F_2$  的周长为  $\frac{15}{2}$ ? 若存在, 求  $\tan \theta$

的值; 若不存在, 请说明理由.